

Θέματα για Διπλωματικές Εργασίες
(Ακαδημαϊκό Έτος 2025–26)

Θέματα Θεωρίας Συνόλων

(Α. Αρβανιτάκης)

Επιλογή συγκεκριμένου θέματος από αυτήν την περιοχή σε συνεννόηση με τον επιβλέποντα (π.χ. το αξίωμα του Martin ή το αξίωμα $V = L$).

Θέματα Τοπολογίας

(Α. Αρβανιτάκης)

Επιλογή συγκεκριμένου θέματος από αυτήν την περιοχή σε συνεννόηση με τον επιβλέποντα (π.χ. παρασυσμάρχεια μετρικών χώρων, θεωρήματα μετριοποιησιμότητας).

Θέματα Θεωρίας Αναδρομής

(Α. Αρβανιτάκης)

Επιλογή συγκεκριμένου θέματος από αυτήν την περιοχή σε συνεννόηση με τον επιβλέποντα.

Κατασκευάσιμα πολύγωνα και οι αριθμοί του Fermat

(Χ. Βασιλακοπούλου)

Όπως απέδειξε ο Gauss, υπάρχει μια αξιοσημείωτη σχέση μεταξύ των κατασκευών των κανονικών πολυγώνων με κανόνα και διαβήτη και των αριθμών του Fermat, $F_n = 2^{2^n} + 1$. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει μια ικανή συνθήκη για την έκφραση του πλήθους των πλευρών τους μέσω των F_n που είναι πρώτοι αριθμοί, η οποία εγγυάται ότι το πολύγωνο είναι κατασκευάσιμο. Το αντίστροφο αυτού του θεωρήματος αποδείχθηκε αργότερα από τον Wantzel. Έτσι απαντήθηκε πλήρως ένα από τα σημαντικότερα ερωτήματα των Αρχαίων Ελλήνων, δηλαδή ποιά κανονικά πολύγωνα είναι Ευκλείδεια κατασκευάσιμα.

Βιβλιογραφία

1. B. Bold. Famous Problems of Geometry and How to Solve Them. Dover Publications (1982).
2. D.S. Dummit and R.M. Foote. Abstract algebra. Wiley Publications (2004).

Αβελιανές κατηγορίες

(Χ. Βασιλακοπούλου)

Η έννοια της αβελιανής κατηγορίας αποτελεί μια αφαίρεση των βασικών ιδιοτήτων της κατηγορίας των αβελιανών ομάδων και ομομορφισμών, καθώς και γενικότερα των R -προτύπων και R -γραμμικών συναρτήσεων. Εντός μιας αβελιανής κατηγορίας, αντικείμενα και μορφισμοί μπορούν να «προστεθούν», και υπάρχουν πυρήνες και συν-πυρήνες με κατάλληλες ιδιότητες. Πολλά κλασικά αλγεβρικά αποτελέσματα όπως το Λήμμα του Snake μπορούν να αποδειχθούν εντός μιας οποιασδήποτε αβελιανής κατηγορίας, οι οποίες επίσης αποτελούν τον πιο κατάλληλο φορμαλισμό για τον κλάδο της Ομολογιακής Άλγεβρας.

Βιβλιογραφία

1. P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych, V. Ostrik. Tensor Categories. AMS Mathematical Surveys and Monographs 205 (2015).
2. S. MacLane. Categories for the Working Mathematician. Graduate Texts in Mathematics 5, Springer (1971).

Συναλγεβρες και Επιστήμη των Υπολογιστών

(X. Βασιλακοπούλου)

Η θεωρία των συναλγεβρών αποτελεί, εντός της περιοχής της Θεωρητικής Επιστήμης των Υπολογιστών, μια ενοποιητική προσέγγιση σε σχέση με τα μαθηματικά των συστημάτων όπως τα αυτόματα, δίκτυα Petri κ.ά. καθώς και από τη θεωρία “state-based” υπολογισμού. Υπάρχουν εκτεταμένες εφαρμογές των συναλγεβρών σε σχέση με τύπους δεδομένων, τεχνικές προγραμματισμού, λογική και πολλά άλλα πεδία.

Βιβλιογραφία

1. J. Adamek. Introduction to Coalgebra. Theory and Applications of Categories, Vol. 14, No. 8 (2005).
2. B. Jacobs. Introduction to Coalgebra: Towards Mathematics of States and Observation. Cambridge University Press (2016).

Αραιή προσέγγιση σε πολλές διαστάσεις

(Ε. Γεωργούλης)

Η επίτευξη καλής προσέγγισης συναρτήσεων από απλούστερες, π.χ. πολυώνυμα [1] ή Γκαουσιανές συναρτήσεις [2] είναι πρόβλημα εκθετικά αυξανόμενης πολυπλοκότητας καθώς αυξάνεται η διάσταση. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε μια συνάρτηση $f : [0, 1]^d \rightarrow \mathbb{R}$ για $d \geq 3$ και ας υποθέσουμε ότι το κάνουμε χρησιμοποιώντας τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις σε ένα πλέγμα με N σημεία σε κάθε κατεύθυνση, δηλ., N^d σημεία. Τότε, η προσέγγιση απαιτεί τον υπολογισμό της f σε N^d σημεία. Αν $N = 10$ και $d = 10$, χρειαζόμαστε 10 δισεκατομμύρια τιμές της f . Εάν η συνάρτηση f είναι «κατάλληλα» ομαλή, είναι δυνατό να επιτευχθεί καλή προσέγγιση χρησιμοποιώντας πολύ λιγότερα σημεία, δηλαδή να μειωθεί η υπολογιστική πολυπλοκότητα λόγω υψηλής διάστασης. Μια επιτυχημένη κατηγορία μεθόδων προσέγγισης ικανών να μειώσουν την πολυπλοκότητα είναι τα λεγόμενα αραιά πλέγματα ή, γενικά, μέθοδοι αραιής προσέγγισης. Σκοπός της εργασίας είναι η μελέτη της κατηγορίας αραιών μεθόδων προσέγγισης, η διερεύνηση της τάξης σύγκλισής τους, ή/και η υλοποίηση στον υπολογιστή. Αν υπάρχει ενδιαφέρον, θα συζητήσουμε και πιθανές εφαρμογές από τη φυσική ή τα οικονομικά.

Βιβλιογραφία

1. H.-J. Bungartz and M. Griebel. “Sparse grids”. Acta Numerica vol. 13, pp. 147 - 269 (2004).
2. E. H. Georgoulis, J. Levesley and F. Subhan. Multilevel sparse kernel-based interpolation. SIAM Journal on Scientific Computing vol. 35, pp. A815-A831 (2013).

Αριθμητική επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων με ασυνεχή πεπερασμένα στοιχεία

(Ε. Γεωργούλης)

Οι μέθοδοι πεπερασμένων στοιχείων (ΜΠΣ, finite element methods) είναι εξαιρετικά δημοφιλείς για την αριθμητική επίλυση προβλημάτων ελλειπτικών και παραβολικών μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ) που προέρχονται από την προτυποποίηση του συνεχούς προβλημάτων ελαστικότητας, θερμότητας, ηλεκτρομαγνητισμού, μοντέλων κυνηγού-θηράματος στη μαθηματική βιολογία, τιμολόγηση παραγώγων στη χρηματοοικονομία και πολλών άλλων. Οι ΜΠΣ απαντώνται σε λογισμικά ανάλυσης μηχανικών και ηλεκτρικών κατασκευών, σε εξειδικευμένες υπολογιστικές εφαρμογές, κτλ. Ταυτόχρονα, οι κλασικές ΜΠΣ δεν έχουν την ίδια επιτυχία στην αριθμητική επίλυση υπερβολικών εξισώσεων ή εξισώσεων που προτυποποιούν φαινόμενα μεταφοράς, συναγωγής/μεταγωγής, όπως π.χ., εξισώσεις της ρευστοδυναμικής (συστήματα Euler, Navier-Stokes, Boussinesq κτλ.). Σε αυτές τις εφαρμογές απαντώνται κυρίως μέθοδοι πεπερασμένων χωρίων/όγκων (finite volume methods) οι οποίες είναι, ως επί το πλείστον, χαμηλής τάξης ακρίβειας.

Τα τελευταία είκοσι χρόνια, η κατηγορία των ασυνεχών μεθόδων Galerkin (discontinuous Galerkin methods) κερδίζει δημοτικότητα ως ένα ευέλικτο εργαλείο για την αριθμητική επίλυση όλων των κατηγοριών προβλημάτων που περιλαμβάνουν μερικές διαφορικές εξισώσεις. Οι ασυνεχείς μέθοδοι Galerkin συνδυάζουν τα στέρεα μαθηματικά θεμέλια των κλασικών μεθόδων πεπερασμένων στοιχείων ενώ ταυτόχρονα είναι ικανές να παρέχουν προσεγγίσεις υψηλής πιστότητας για προβλήματα υπερβολικού τύπου, π.χ., μεταφοράς/συναγωγής/μεταγωγής, διακριτοποίηση νόμων διατήρησης, κτλ.

Η εργασία αφορά την εισαγωγή στη μαθηματική θεωρία ασυνεχών μεθόδων Galerkin και τη μελέτη των ιδιοτήτων ευστάθειας και τάξης σύγκλισής τους. Αν είναι επιθυμητό, μπορεί να δοθεί έμφαση στην υλοποίηση των μεθόδων αυτών στον υπολογιστή, αντί (ή παράλληλα) της θεωρητικής μελέτης τους.

Βιβλιογραφία

1. D. A. Di Pietro, A. Ern. Mathematical Aspects of Discontinuous Galerkin Methods (2012).
2. E. H. Georgoulis. Discontinuous Galerkin methods for linear problems; an introduction. In Springer Proceedings in Mathematics, Vol. 3, Springer-Verlag, Berlin (2011).

Αριθμητική επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων με χρήση νευρωνικών δικτύων

(Ε. Γεωργούλης)

Η αριθμητική επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων (PDEs) με χρήση νευρωνικών δικτύων έχει προξενήσει ενδιαφέρον ως εναλλακτική μεθοδολογία στις παραδοσιακές μεθόδους όπως οι μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών και πεπερασμένων στοιχείων. Τα νευρωνικά δίκτυα αξιοποιούν τη βαθιά μάθηση για την προσέγγιση των λύσεων ενσωματώνοντας προβλήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων στη συνάρτηση απώλειάς τους. Σε αντίθεση με τις συμβατικές αριθμητικές τεχνικές, τα νευρωνικά δίκτυα μπορούν να χειριστούν αποτελεσματικά προβλήματα υψηλών διαστάσεων χωρίς την ανάγκη εκτεταμένου πλέγματος. Στον αντίποδα, υπάρχουσες μέθοδοι αριθμητικής επίλυσης μερικών διαφορικών εξισώσεων με χρήση νευρωνικών δικτύων συνήθως χαρακτηρίζονται από χειρότερες ιδιότητες ακρίβειας προσέγγισης, ευστάθειας και τυχαιότητα της ποιότητας προσέγγισης. Στην εργασία αυτή θα μελετήσουμε μερικές γνωστές μεθόδους αυτής της μορφής και, αν επιτρέψει ο χρόνος, πιθανές παραλλαγές των γνωστών μεθόδων με σκοπό την βελτίωσή τους. Η εργασία θα συμπεριλαμβάνει σημαντική προγραμματιστική συνιστώσα.

Βιβλιογραφία

1. B. Després. Neural Networks and Numerical Analysis. De Gruyter Series in Applied and Numerical Mathematics, vol 6 (2022).

2. M. Raissi, P. Perdikaris, G. E. Karniadakis. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational physics* 378, 686-707 (2019)

Ένας μετρικός χαρακτηρισμός των χώρων με νόρμα

(N. Γιαννακάκης)

Έστω X ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος. Μια μετρική $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ καλείται αναλλοίωτη ως προς τις μεταφορές αν

$$d(x+z, y+z) = d(x, y), \text{ για κάθε } x, y, z \in X.$$

Κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ στον X επάγει μια μετρική στον X αναλλοίωτη ως προς τις μεταφορές που ορίζεται με τον τύπο

$$d(x, y) = \|x - y\|, \text{ για κάθε } x, y \in X.$$

Οι Oikhberg και Rosenthal το 2007 στο [2] έδωσαν έναν γεωμετρικό χαρακτηρισμό των μετρικών σε διανυσματικούς χώρους που επάγονται από νόρμες. Πιο συγκεκριμένα, απέδειξαν ότι αν η μετρική d είναι αναλλοίωτη ως προς τις μεταφορές και

- (i) ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός είναι συνεχής,
- (ii) κάθε μονοδιάστατος υπόχωρος του X είναι ισομετρικός με το \mathbb{R} ,

τότε η d επάγεται από κάποια νόρμα στον X .

Λίγο καιρό μετά, το 2008, ο Šemrl στο [3] απέδειξε ότι η υπόθεση (i) της συνέχειας είναι περιττή αν η διάσταση του X είναι μεγαλύτερη από 1. Στη συνέχεια, το 2011, ο ίδιος συγγραφέας στο [4] έδωσε μια αρκετά απλούστερη απόδειξη και επιπλέον αντικατέστησε τις (i) και (ii) με δύο ασθενέστερες υποθέσεις. Πιο συγκεκριμένα, αν η μετρική d είναι αναλλοίωτη ως προς τις μεταφορές και

- (iii) για κάθε $x \in X$ το σύνολο $\{tx : t \in [0, 1]\}$ είναι φραγμένο,
- (iv) κάθε αλγεβρικός μέσος είναι και μετρικός μέσος,

τότε η d επάγεται από κάποια νόρμα στον X .

Το 2016 ο Chiemiński παρουσίασε στο [1] μία διαφορετική γεωμετρική συνθήκη η οποία σε συνδιασμό με μια συνθήκη ομαλότητας εξασφαλίζει αντίστοιχο αποτέλεσμα.

Στόχος της διπλωματικής: η αναλυτική παρουσίαση των παραπάνω αποτελεσμάτων καθώς και πιθανές επεκτάσεις τους.

Προαπαιτούμενα: Πραγματική και Συναρτησιακή Ανάλυση.

Βιβλιογραφία

1. J. Chiemiński, *A note on a characterization of metrics generated by norms*, Rocky Mountain J Math **45** (2016) 1801-1805.
2. T. Oikhberg and H. Rosenthal, *A metric characterization of normed linear spaces*, Rocky Mountain J Math **37** (2007) 597-608.
3. P. Šemrl, *A characterization of normed spaces*, J. Math. Analysis Appl. **343** (2008) 1047-1051.
4. P. Šemrl, *A characterization of normed spaces among metric spaces*, Rocky Mountain J Math **41** (2007) 293-298.

Η ανισότητα Harnack μας λέει ότι αν u είναι μια θετική αρμονική συνάρτηση στον δίσκο $D(0, R)$, τότε για κάθε $R' < R$ έχουμε ότι

$$\max_{D(0, R')} u \leq c \min_{D(0, R')} u$$

όπου η σταθερά $c > 0$ εξαρτάται μόνο από το R' .

Η ανισότητα αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως μία πιο ακριβής και ποσοτική εκδοχή της αρχής του μεγίστου και χρησιμοποιείται σε αποδείξεις ύπαρξης εξασφαλίζοντας συμπάγια.

Η ανισότητα Harnack γενικεύτηκε αρχικά από τον Moser για γραμμικές ελλειπτικές διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης στο [3] το 1961. Σημαντική συνέπεια αυτής της γενίκευσης ήταν μία σχετικά απλή απόδειξη του διάσημου αποτελέσματος «ομαλότητας» του De Giorgi [1]. Στη συνέχεια οι Serrin στο [4] και Trudinger στο [5] την απέδειξαν για μη γραμμικές ελλειπτικές εξισώσεις.

Η σχετικά πρόσφατη εργασία [2] επεκτείνει την ανισότητα Harnack για συναρτήσεις που ελαχιστοποιούν συναρτησιακά διπλής φάσης. Τα συναρτησιακά αυτά αποτελούν τα τελευταία χρόνια ένα πολύ ενεργό πεδίο έρευνας.

Στόχος της διπλωματικής: η αναλυτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων, ξεκινώντας από το κλασικό αποτέλεσμα για αρμονικές συναρτήσεις έως και τα συναρτησιακά διπλής φάσης.

Προαπαιτούμενα: Συναρτησιακή Ανάλυση, Θεωρία Μέτρου, χώροι Sobolev.

Βιβλιογραφία

1. E. De Giorgi, *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari*, Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., Ser. 3, **3** (1957) 25-43.
2. P. Baroni, M. Colombo and G. Mingione, *Harnack inequalities for double phase functionals*, Nonlinear Analysis **121** (2015) 206-222.
3. J. Moser, *On Harnack's theorem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961) 577-591.
4. J. Serrin, *Local behavior of solutions of quasi-linear elliptic equations*, Acta Math. **111** (1964) 247-302.
5. N. Trudinger, *On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations.*, Comm. Pure Appl. Math. **20** (1967) 721-747.

Έστω X ένας μιγαδικός χώρος Banach. Ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $A : X \rightarrow X$ καλείται αντιγραμμικός εάν

$$A(x + y) = Ax + Ay \text{ και } A(\lambda x) = \bar{\lambda}Ax, \text{ για κάθε } x, y \in X, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ένα τυπικό παράδειγμα αντιγραμμικού τελεστή είναι ο $f \mapsto \bar{f}$ στους χώρους L^p .

Οι αντιγραμμικοί τελεστές έχουν πρόσφατα μελετηθεί αρκετά (δες [1], [2], [3], [6], [7] και [9]).

Ειδικότερα το αριθμητικό πεδίο για αντιγραμμικούς τελεστές σε χώρους Hilbert και Banach ορίστηκε και μελετήθηκε στις εργασίες [4] και [5] όπου και αποδείχθηκε ότι είναι δακτύλιος. Το αποτέλεσμα αυτό βελτιώθηκε σημαντικά από τους Kołaczek και Müller το 2024 στο [8], αφού έδειξαν ότι και στις δύο περιπτώσεις το αριθμητικό πεδίο ενός αντιγραμμικού τελεστή είναι δίσκος και συνεπώς κυρτό σύνολο. Αυτό είναι αρκετά εντυπωσιακό αφού για γραμμικούς τελεστές σε χώρους Banach κάτι τέτοιο δεν ισχύει .

Στόχος της διπλωματικής: Παρουσίαση των παραπάνω αποτελεσμάτων και επεκτάσεις.

Προαπαιτούμενα: Συναρτησιακή Ανάλυση.

Βιβλιογραφία

1. C.M. Câmara, K. Kliś-Garlicka, B. Lanucha and M. Ptak, *Conjugations in L^2 and their invariants*, Anal. Math. Phys. **10** (2020) 1-14.
2. C.M. Câmara, K. Kliś-Garlicka, B. Lanucha and M. Ptak, *Conjugations in $L^2(H)$* , Integr. Equ. Oper. Theory **92** (2020) 1-25.
3. M. Cho, I. Hur and J. E. Lee, *Complex symmetric operators and isotropic vectors on Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **479** (2019) 752-764.
4. M. Cho, I. Hur and J. E. Lee, *Numerical Ranges of Conjugations and Antilinear Operators on a Banach Space*, Filomat **35** (2021) 2715-2720.
5. I. Hur, J. E. Lee, *Numerical ranges of conjugations and antilinear operators*, Linear Multilinear Algebra **69** (2021) 2990-2997.
6. E. Ko, J. E. Lee and M. J. Lee, *On properties of C -normal operators*, Banach J. Math. Anal. **15** (2021) 1-17.
7. E. Ko, J. E. Lee and M. -J. Lee, *On properties of C -normal operators II*, Ann. Funct. Anal. **14** (2023) paper no. 29.
8. D. Kołaczek and V. Müller, *Numerical Ranges of Antilinear Operators*, Integr. Equ. Oper. Theory **121** (2024) 96:17.
9. M. Ptak, K. Simik and A. Wicher, *C -normal operators*, J. Linear Algebra **36** (2020) 67-79.

Εικασία του υπερεπιπέδου (έχει δοθεί)

(Α. Γιαννόπουλος)

Ένα από τα κεντρικά ανοικτά προβλήματα της θεωρίας των κυρτών σωμάτων ήταν η εικασία του υπερεπιπέδου, η οποία ρωτάει αν υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε $\max_{\theta \in S^{n-1}} \text{vol}_{n-1}(K \cap \theta^\perp) \geq c$ για κάθε κυρτό σώμα K όγκου 1 στον \mathbb{R}^n που έχει βαρύκεντρο την αρχή των αξόνων. Το πρόβλημα τέθηκε από τον Bourgain (1986) και είναι ισοδύναμο με πολλά άλλα προβλήματα σχετικά με την κατανομή του όγκου σε κυρτά σώματα μεγάλων διαστάσεων. Σκοπός της εργασίας είναι να μελετήσουμε την καταφατική απάντηση που δόθηκε από τους Klartag και Lehec (Δεκέμβριος 2024).

Βιβλιογραφία

1. S. Brazitikos, A. Giannopoulos, P. Valettas and B-H. Vritsiou, *Geometry of isotropic convex bodies*, Amer. Math. Society, Mathematical Surveys and Monographs 196 (2014).
2. Q. Y. Guan, *A note on Bourgain's slicing problem*, Preprint (<https://arxiv.org/abs/2412.09075>).
3. B. Klartag and J. Lehec, *Isoperimetric inequalities in high-dimensional convex sets*, Institut Henri Poincaré (IHP), Paris, May 21–24, 2024.

4. B. Klartag and J. Lehec, Affirmative resolution of Bourgain’s slicing problem using Guan’s bound, Preprint (<https://arxiv.org/abs/2412.15044>).

Επεκτάσεις συναρτήσεων

(Α. Γιαννόπουλος)

Θα μελετήσουμε διάφορα αποτελέσματα σχετικά με επεκτάσεις συναρτήσεων. Δύο από τα πιο σημαντικά θεωρήματα αυτού του είδους είναι τα θεωρήματα των Kirszbraun και Whitney, τα οποία είναι πολύ ισχυρά τεχνικά εργαλεία που εφαρμόζονται σε πολλά προβλήματα της Ανάλυσης. Ένας τρόπος για να σχεφτόμαστε αυτά τα θεωρήματα είναι ότι εξασφαλίζουν κάποια παρεμβολή δεδομένων με δοθείσες ιδιότητες. Από αυτήν την άποψη είναι χρήσιμα στην επιστήμη υπολογιστών, για παράδειγμα στην ομαδοποίηση δεδομένων και στη μείωση διάστασης.

Βιβλιογραφία

1. K. Ball, Markov chains, Riesz transforms and Lipschitz maps, Geometric and Functional Analysis GAFA 2 (1992), no. 2, 137–172.
2. K. J. Ciosmak, Extensions of functions, Oxford, Lecture Notes.
3. C. L. Fefferman, A sharp form of Whitney’s extension theorem, Annals of Mathematics 161 (2005), no. 1, 509–577.
4. J. Lee, JL lemma and Kirszbraun’s extension theorem, 2020, Sublinear Algorithms for Big Data Lectures Notes, Brown University.
5. A. Naor, Metric embeddings and Lipschitz extensions, Princeton University, Lecture Notes, 2015.
6. J. H. Wells and L. R. Williams, Embeddings and extensions in analysis. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 84. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975. vii+108 pp.
7. H. Whitney, Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, Transactions of the American Mathematical Society 36 (1934), no. 1, 63–89.

Το πρόβλημα των διακεκριμένων αποστάσεων του Erdős

(Α. Γιαννόπουλος)

Το πρόβλημα των διακεκριμένων αποστάσεων του Erdős ρωτάει ποιος είναι ο ελάχιστος δυνατός αριθμός αποστάσεων που προσδιορίζονται από n σημεία στο επίπεδο. Για κάθε μη κενό πεπερασμένο σύνολο $P \subset \mathbb{R}^2$ ορίζουμε $\Delta(P) = \{\|p - p'\|_2 : p, p' \in P\}$. Θα θέλαμε να εκτιμήσουμε την ποσότητα

$$\alpha_{n,2} = \min\{|\Delta(P)| : P \subset \mathbb{R}^2, |P| = n\},$$

όπου, για κάθε πεπερασμένο σύνολο A , συμβολίζουμε με $|A|$ το πλήθος των στοιχείων του A . Ο ίδιος ο Erdős έλεγξε ότι αν τα n σημεία τοποθετηθούν σε ένα τετραγωνικό πλέγμα τότε το πλήθος των διακεκριμένων αποστάσεων που δημιουργούν είναι $\approx \frac{n}{\sqrt{\log n}}$ και έκανε την εικασία ότι αυτή είναι η «χειρότερη» περίπτωση,

δηλαδή ότι $\alpha_{n,2} \approx \frac{n}{\sqrt{\log n}}$. Στην ίδια εργασία απέδειξε ότι $\alpha_{n,2} \geq \sqrt{n - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}$. Στόχος της εργασίας είναι να μελετήσουμε το καλύτερο γνωστό αποτέλεσμα, το οποίο σχεδόν επιβεβαιώνει την εικασία. Αποδείχθηκε από τους Guth και Katz το 2015: Για κάθε σύνολο P με n σημεία στο επίπεδο, ισχύει ότι $|\Delta(P)| \gtrsim \frac{n}{\log n}$.

Βιβλιογραφία

1. J. Garibaldi, A. Iosevich and S. Senger, The Erdős Distance Problem, Student Math. Library 56, Amer. Math. Soc., 2011.
2. L. Guth, Polynomial methods in combinatorics. University Lecture Series, 64. American Mathematical Society, Providence, RI, 2016. ix+273 pp.
3. L. Guth and N. H. Katz, On the Erdős distinct distances problem in the plane, Ann. of Math. (2) 181 (2015), no. 1, 155–190.

Θεωρία απόκλισης (discrepancy) και σχετικοί αλγόριθμοι

(Α. Γιαννόπουλος)

Θα μελετήσουμε κλασικά αποτελέσματα και τεχνικές της θεωρίας απόκλισης (discrepancy theory) και σύγχρονες προσεγγίσεις που έχουν σκοπό να κάνουν αυτές τις τεχνικές αλγοριθμικές. Οι προηγούμενες μέθοδοι βασίζονταν σε μη κατασκευαστικές αρχές όπως η αρχή του περιστερώνα και σε επιχειρήματα απαρίθμησης στα οποία υπεισέρχονταν εκθετικά πολλά αντικείμενα και ο όγκος κυρτών σωμάτων. Οι σύγχρονες αλγοριθμικές μέθοδοι εκμεταλλεύονται τεχνικές από τη διακριτή κίνηση Brown, την κυρτή γεωμετρία, τη βελτιστοποίηση και την ανάλυση πινάκων, και έχουν οδηγήσει σε ενδιαφέροντα αποτελέσματα τόσο στη θεωρία απόκλισης όσο και στον σχεδιασμό αλγορίθμων. Ενδεικτικά θέματα: το θεώρημα του Spencer, οι εικασίες των Beck-Fiala και Komlós, αλγόριθμος Lovett-Meka, αλγόριθμος του Rothvoss, περίπατος Gram-Schmidt, το πρόβλημα των Kadison-Singer, ανισότητα Spencer για πίνακες.

Βιβλιογραφία

1. W. Banaszczyk, Balancing vectors and Gaussian measures of n -dimensional convex bodies. Random Structures Algorithms 12 (1998), no. 4, 351–360.
2. N. Bansal, Constructive Algorithms for Discrepancy Minimization. In Proceedings of FOCS 2010, pp. 3–10, IEEE, 2010.
3. N. Bansal, D. Dadush, and S. Garg, An algorithm for Komlos conjecture matching Banaszczyk’s bound. In Proceedings of FOCS 2016, pp. 788–799, IEEE, 2016.
4. J. Beck and T. Fiala, “Integer-making” theorems. Discrete Appl. Math. 3 (1981), no. 1, 1–8.
5. B. Chazelle, The discrepancy method: randomness and complexity. Cambridge University Press, 2001.
6. S. Lovett and R. Meka, Constructive discrepancy minimization by walking on the edges. SIAM J. Comput. 44 (2015), no. 5, 1573–1582.
7. A. W. Marcus, D. A. Spielman, and N. Srivastava, Interlacing families II: mixed characteristic polynomials and the Kadison-Singer problem. Ann. of Math. 182 (2015), 327–350.
8. J. Matoušek, Geometric discrepancy: an illustrated guide. Algorithms Combin. 18, Springer, 2009.
9. T. Rothvoss, Constructive discrepancy minimization for convex sets. In Proceedings of FOCS 2014, pp. 140–145, IEEE, 2014.
10. J. Spencer, Six standard deviations suffice. Trans. Amer. Math. Soc. 289 (1985), no. 2, 679–706.
11. D. A. Spielman and S. Teng, Smoothed analysis: an attempt to explain the behavior of algorithms in practice. Commun. ACM 52 (2009), no. 10, 76–84.

The Hairy Ball Theorem και το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer (B. Γρηγοριάδης)

Το Hairy Ball Theorem λέει ότι κάθε συνεχές διανυσματικό πεδίο που εφάπτεται σε μια σφαίρα άρτιας διάστασης θα έχει ένα σημείο στο οποίο μηδενίζεται. Αυτό έχει φυσικές ερμηνείες όπως ότι σε κάθε ύψος στην ατμόσφαιρα ενός πλανήτη υπάρχει ένα σημείο όπου δεν υπάρχει οριζόντιος άνεμος.

Το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer λέει ότι κάθε συνεχής συνάρτηση από την κλειστή μοναδιαία μπάλα του ευκλείδειου χώρου στον εαυτό του έχει σταθερό σημείο. Μια εφαρμογή αυτού είναι ότι σε κάθε χάρτη μίας χώρας που βρίσκεται σε αυτή τη χώρα μπορεί να τοποθετηθεί η ένδειξη «βρίσκεστε εδώ».

Σε αυτό το θέμα γίνεται μελέτη και απόδειξη των πιο πάνω θεμελιωδών αποτελεσμάτων της τοπολογίας καθώς και της σχέσης μεταξύ τους.

Βιβλιογραφία

1. William M. Boothby. On two classical theorems of algebraic topology. The American Mathematical Monthly, 78 (3): 237–249, 1971.
2. John Milnor. Analytic Proofs of the “Hairy Ball Theorem” and the Brouwer Fixed Point Theorem. The American Mathematical Monthly, Vol. 85, No. 7, pp. 521–524, 1978.
3. Eisenberg Murray and Guy Robert. A Proof of the Hairy Ball Theorem. The American Mathematical Monthly, 86 (7): 571–574, 1979.

Το Θεώρημα Jordan-καμπύλης (Jordan curve theorem)

(B. Γρηγοριάδης)

Το Θεώρημα Jordan-καμπύλης λέει ότι κάθε απλή κλειστή καμπύλη του επιπέδου διαχωρίζει το επίπεδο σε ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες, τη μία φραγμένη και την άλλη μη φραγμένη. Η καμπύλη είναι το κοινό σύνορο αυτών των συνιστωσών. Αυτό το αποτέλεσμα έχει γενικευθεί και σε μεγαλύτερες διαστάσεις (Θεώρημα Διαχωρισμού Jordan-Brouwer). Επίσης έχει δοθεί και μια διακριτή εκδοχή του (Hex Theorem).

Σε αυτό το θέμα γίνεται μελέτη αυτών των αποτελεσμάτων και της σχέσης τους με άλλα γνωστά αποτελέσματα όπως το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer.

Βιβλιογραφία

1. David Gale. The Game of Hex and the Brouwer Fixed-Point Theorem. The American Mathematical Monthly, 86 (10): 818–827, 1979.
2. Thomas C. Hales. Jordan’s proof of the Jordan curve theorem. 2007. Notes online: <https://webhomes.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/hales1.pdf>.
3. Ryuji Maehara. The Jordan Curve Theorem Via the Brouwer Fixed Point Theorem. The American Mathematical Monthly, pp. 641–643, 1984.

Οι Riemann και Heine έθεσαν το ερώτημα κατά πόσον οι συντελεστές μιας τριγωνομετρικής σειράς είναι μηδενικοί δεδομένου ότι η τριγωνομετρική σειρά είναι ταυτοτικά μηδέν (μοναδικότητα αναπτύγματος τριγωνομετρικής σειράς). Το ερώτημα απαντήθηκε θετικά από τον Cantor, ο οποίος ασχολήθηκε με επεκτάσεις αυτού του αποτελέσματος, στις οποίες μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι συντελεστές της τριγωνομετρικής σειράς είναι μηδέν με την ασθενέστερη υπόθεση ότι η σειρά είναι μηδέν σε όλα τα σημεία πλην ενός συνόλου «εξαιρετικών» σημείων.

Όπως αποδείχθηκε από τους Cantor και Lebesgue, κάθε αριθμήσιμο και κλειστό σύνολο είναι σύνολο εξαιρετικών σημείων (ανεξάρτητα από την τριγωνομετρική σειρά). Αυτή η δουλειά του Cantor αποτέλεσε γι' αυτόν ένα σημαντικό κίνητρο για τη δημιουργία της θεωρίας συνόλων και αποτέλεσε εφιαλτήριο για την έννοια των διατακτικών αριθμών.

Σε αυτό το θέμα μελετάται το πιο πάνω αποτέλεσμα των Cantor-Lebesgue και τα συναφή αποτελέσματα, όπως για παράδειγμα το Θεώρημα Cantor-Bendixson. Γι' αυτό το θέμα χρειάζεται εξοικείωση με τις έννοιες της υπερπεπερασμένης επαγωγής και των διατακτικών αριθμών.

Βιβλιογραφία

1. A. S. Kechris. Set theory and uniqueness of trigonometric series (dedicated to the memory of Stelios Pichorides).
Notes online: <https://pma.caltech.edu/documents/5627/uniqueness.pdf>.
2. A. S. Kechris and A. Louveau. Descriptive set theory and harmonic analysis, J. Symb. Logic, 57 (2), 413–441, 1992.
3. R. Cooke. Uniqueness of Trigonometric Series and Descriptive Set Theory, 1870-1985, Arch. for History of Exact Sciences, 45 (4), 281–334, 1993.

Η Θεωρία Ramsey ξεκίνησε από το ακόλουθο αποτέλεσμα του Ramsey (1930):

(1) Για κάθε διαμέριση των υποσυνόλων με k στοιχεία ενός άπειρου συνόλου S σε πεπερασμένο πλήθος κλάσεων υπάρχει ένα άπειρο υποσύνολο του S του οποίου όλα τα υποσύνολα με k στοιχεία βρίσκονται σε μία μόνο από τις κλάσεις.

Ο Ramsey απέδειξε και πεπερασμένες μορφές του παραπάνω αποτελέσματος:

(2) Για κάθε k, m, n υπάρχει $N = N(k, m, n)$ τέτοιο ώστε για κάθε διαμέριση των υποσυνόλων με k στοιχεία ενός συνόλου S με N στοιχεία σε m κλάσεις υπάρχει ένα υποσύνολο του S με n στοιχεία του οποίου όλα τα υποσύνολα με k στοιχεία βρίσκονται σε μία μόνο από τις κλάσεις.

Το (2) αποδεικνύεται ότι είναι συνέπεια του (1). Ένα κλασικό παράδειγμα είναι όταν $k = m = 2$ και $n = 3$ όπου τότε $N = 6$: Μεταξύ έξι ατόμων υπάρχουν τρεις που είναι είτε ανά δύο γνωστοί είτε ανά δύο άγνωστοι.

Ακόμα πιο παλιά, ο Schur (1916) είχε αποδείξει ότι:

(3) Για κάθε διαμέριση των φυσικών αριθμών σε πεπερασμένο πλήθος κλάσεων υπάρχει μια κλάση που περιέχει τρεις αριθμούς x, y και z όπου $z = x + y$.

Είχε χρησιμοποιήσει αυτό το αποτέλεσμα για να αποδείξει την ύπαρξη μη τετριμμένων λύσεων της εξίσωσης Fermat $x^n + y^n = z^n \pmod{p}$ για αρκετά μεγάλους πρώτους p .

Ένα άλλο διάσημο αποτέλεσμα είναι και το Θεώρημα Van der Waerden (1927):

(4) Για κάθε διαμέριση των φυσικών αριθμών σε πεπερασμένο πλήθος κλάσεων υπάρχει μια κλάση που περιέχει αριθμητικές προόδους οποιουδήποτε πεπερασμένου μήκους.

Το (4) έχει και αυτό αντίστοιχη πεπερασμένη μορφή ανάλογη του (2). Το επόμενο θεώρημα οφείλεται στον Hindman(1974) και επεκτείνει το (3):

(5) Για κάθε διαμέριση των φυσικών αριθμών σε πεπερασμένο πλήθος κλάσεων υπάρχει μια κλάση που περιέχει ένα άπειρο σύνολο μαζί με όλα τα αθροίσματα οποιουδήποτε πεπερασμένου πλήθους διαφορετικών ανά δύο στοιχείων του.

Μια αφηρημένη επέκταση του (4) είναι το Θεώρημα Hales–Jewett (1963): Θεωρούμε όλες τις πεπερασμένου μήκους ακολουθίες με στοιχεία από το σύνολο $\{1, \dots, k\}$, όπου $k \geq 2$ ακέραιος. Τις ακολουθίες αυτές τις βλέπουμε σαν λέξεις, τα στοιχεία $1, \dots, k$ ως γράμματα και το σύνολο $\{1, \dots, k\}$ ως αλφάβητο. Με τον όρο *συνδυαστική γραμμή* εννοούμε μια ομάδα από k το πλήθος λέξεις w_1, w_2, \dots, w_k που ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες: (α) έχουν όλες κοινό μήκος n και (β) υπάρχει ένα μοναδικό μη κενό υποσύνολο F του $\{1, \dots, n\}$ τέτοιο ώστε στις θέσεις εκτός του F (αν υπάρχουν) όλες οι λέξεις w_1, \dots, w_k ταυτίζονται μεταξύ τους, ενώ σε όλες τις θέσεις εντός του F όλες οι λέξεις w_1, \dots, w_k διαφέρουν ανα δύο με τον εξής τρόπο: η λέξη w_1 έχει το σταθερό γράμμα 1 σε όλες τις θέσεις του F , η w_2 το 2 κ.ο.κ. Το Θεώρημα Hales–Jewett λέει ότι:

(6) Για κάθε διαμέριση των λέξεων επί ενός πεπερασμένου αλφαβήτου σε πεπερασμένο πλήθος κλάσεων υπάρχει μια κλάση που περιέχει μια συνδυαστική γραμμή.

Το θεώρημα αυτό δίνει ως συνέπεια το (4) αν θεωρήσουμε την ανάλυση κάθε φυσικού αριθμού σε δυνάμεις του k . Γενικά θα λέγαμε ότι η Θεωρία Ramsey ασχολείται με επεκτάσεις και γενικεύσεις των παραπάνω αποτελεσμάτων. Τα αποτελέσματα της Θεωρίας Ramsey έχουν πολλές εφαρμογές σε πολλούς κλάδους των Μαθηματικών. Αναφέρουμε παρακάτω μερικά θέματα της θεωρίας που θα μπορούσαν να επιλεγούν για μια διπλωματική καθώς και μια ενδεικτική βιβλιογραφία που περιλαμβάνει τα θέματα αυτά.

1. Το Θεώρημα Ramsey και επεκτάσεις του: το Θεώρημα Nash-Williams, το Θεώρημα Galvin-Prikry, το Θεώρημα Ellentuck, το Θεώρημα Rosenthal.
2. Το Θεώρημα Hindman και το Θεώρημα Milliken–Taylor.
3. Το Θεώρημα Halpern–Läuchli, το Θεώρημα Milliken στα δένδρα, εφαρμογές στις Baire-1 συναρτήσεις.
4. Το Θεώρημα Hales–Jewett και το Θεώρημα Carlson-Simpson.
5. Το Θεώρημα Graham-Rothschild και το Θεώρημα Carlson.
6. Το Θεώρημα Gowers και οι πεπερασμένες μορφές του.
7. Το παιχνίδι του Gowers, διχοτομίες σε χώρους Banach.
8. Το Θεώρημα Frankl-Rödl, Ευκλείδεια Θεωρία Ramsey.

Βιβλιογραφία

1. P. Dodos and V. Kanellopoulos, *Ramsey theory for Product spaces*, Mathematical Surveys and Monographs, vol.212, 2016.
2. W. T. Gowers, *Ramsey Methods in Banach Spaces*, Handbook of the Geometry of Banach spaces, vol. 2, North-Holland, Amsterdam (2003), 1071–1097
3. R. L. Graham, B. L. Rothschild and J. H. Spencer, *Ramsey Theory*, 2nd edition, John Wiley & Sons, 1980.

4. N. Hindman and D. Strauss, *Algebra in the Stone-Čech compactification: theory and applications*, Walter de Gruyter, Berlin, 1998.
5. S. Todorčević, *Introduction to Ramsey Spaces*, Annals of Mathematics Studies, No. 174, Princeton University Press, 2010.

Μέθοδοι σταθεροποιητικής ανάδρασης για την αριθμητική επίλυση συστημάτων συνήθων διαφορικών εξισώσεων (I. Καραφύλλης)

Στην διπλωματική εργασία αυτή η φοιτήτρια/φοιτητής θα μελετήσει το πρόβλημα επιλογής του χρονικού βήματος σε αριθμητικά σχήματα επίλυσης συστημάτων συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Στόχος είναι η αριθμητική λύση να παρουσιάζει την ίδια ποιοτική συμπεριφορά με την πραγματική λύση του συστήματος. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται εργαλεία από τη μη γραμμική Θεωρία Ελέγχου όπως ο σχεδιασμός ανάδρασης με χρήση συναρτήσεων Lyapunov και με χρήση αποτελεσμάτων Small-Gain. Θα δοκιμαστούν οι μέθοδοι σε εφαρμογές που αφορούν συστήματα με ένα ολικό ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Βιβλιογραφία

1. Grüne, L., *Asymptotic Behavior of Dynamical and Control Systems under Perturbation and Discretization*, Springer-Verlag, 2002.
2. Hairer, E., S. P. Norsett and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I Nonstiff Problems*, 2nd Ed., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1993.
3. Hairer, E. and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II Stiff and Differential-Algebraic Problems*, 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2002.
4. Hairer, E., C. Lubich and G. Wanner, *Geometric Numerical Integration Structure Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, Springer, 2002.
5. Karafyllis, I. and L. Grüne, *Feedback Stabilization Methods for the Numerical Solution of Systems of Ordinary Differential Equations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems: Series B, 16(1), 2011, pp. 283–317.
6. Stuart, A. M. and A. R. Humphries, *Dynamical Systems and Numerical Analysis*, Cambridge University Press, 1998.

Ευρωστία ως προς διάφορους μηχανισμούς απόσβεσης για την 1-D κυματική εξίσωση (I. Καραφύλλης)

Στην διπλωματική εργασία αυτή η φοιτήτρια/φοιτητής θα μελετήσει τις ιδιότητες ευρωστίας της 1-D κυματικής εξίσωσης για μία ελαστική χορδή ως προς διάφορους μηχανισμούς απόσβεσης που συνήθως αγνοούνται στην μελέτη της κυματικής εξίσωσης: (i) τριβή με το περιβάλλον μέσω της χορδής (η λεγόμενη εξώδης απόσβεση), (ii) θερμοελαστικά φαινόμενα (η λεγόμενη θερμική απόσβεση), (iii) εσωτερική τριβή της χορδής (η λεγόμενη Kelvin-Voigt απόσβεση), και (iv) η τριβή στο ελεύθερο άκρο της χορδής (το λεγόμενο passive damper). Το passive damper είναι επίσης ο απλούστατος νόμος ανάδρασης που επιτυγχάνει εκθετική ευστάθεια για την χορδή. Θα μελετηθεί η ευρωστία σε κατανομημένες και συνοριακές διαταραχές με την κατασκευή κατάλληλων Lyapunov συναρτησιακών. Θα επιδιωχθεί η έκφραση των ιδιοτήτων ευρωστίας σε διαφορετικές χωρικές νόρμες.

Βιβλιογραφία

1. Datko, R., *Not All Feedback Stabilized Hyperbolic Systems are Robust with Respect to Small Time Delays in Their Feedbacks*, SIAM Journal on Control and Optimization, 26, 1988, pp. 697–713.
2. Karafyllis, I. and M. Krstic, *Input-to-State Stability for PDEs*. Springer-Verlag, London (Series: Communications and Control Engineering), 2019.
3. Karafyllis, I., M. Kontorinaki and M. Krstic, *Boundary-to-Displacement Asymptotic Gains for Wave Systems with Kelvin-Voigt Damping*, International Journal of Control, 94, 2021, pp. 2822–2833.
4. Karafyllis, I. and M. Krstic, *ISS-Based Robustness to Various Neglected Damping Mechanisms for the 1-D Wave PDE*, Mathematics of Control, Signals, and Systems, 35, 2023, pp. 741–779.
5. Temam, R. M. and A. M. Miranville, *Mathematical Modeling in Continuum Mechanics. 2nd Edition*, Cambridge University Press, 2005.

Η εικασία του φουσερού

(Δ. Κοντοκώστας)

Σύμφωνα με ένα θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους μία προς μία ίσες τότε είναι ίσα μεταξύ τους. Με άλλα λόγια ένα τρίγωνο είναι άκαμπτο: κάθε προσπάθεια να μετακινήσουμε ελαφρώς τις πλευρές του γύρω από τις κορυφές θα αποτύχει να δώσει νέο τρίγωνο. Στον χώρο, ένα θεώρημα του Cauchy βεβαιώνει πως αν δύο συνδυαστικώς ισοδύναμα κυρτά πολύεδρα έχουν ίσες έδρες σε μια αντιστοιχία των εδρών τους, τότε είναι ίσα μεταξύ τους πολύεδρα. Δηλαδή και τα κυρτά πολύεδρα είναι άκαμπτα. Χρόνια μετά το θεώρημα αυτό βρέθηκαν δύο μη κυρτά πολύεδρα που δεν είναι ίσα μεταξύ τους παρότι έχουν ίσες έδρες σε μια αντιστοιχία των εδρών τους. Μπορεί κανείς να σκεφτεί το καθένα από αυτά σαν ένα φουσερό που επιτρέπει την τοπική κίνηση των εδρών του γύρω από τις ακμές του, δίχως να παραμορφώνονται οι ίδιες οι έδρες, ώστε στο τέλος της κίνησης να δίνει το άλλο πολύεδρο. Αποδείχτηκε επιπλέον πως τα δυο αυτά πολύεδρα έχουν ίσους όγκους. Η εικασία του φουσερού λέει πως αν δύο οποιαδήποτε μη ίσα πολύεδρα επιτρέπουν μια αντιστοιχία των εδρών τους με ίσες έδρες, τότε οι όγκοι τους είναι ίσοι. Η αλήθεια ή μη της εικασίας είναι το θέμα της εργασίας...

Βιβλιογραφία

1. V. Alexandrov. An Example of a Flexible Polyhedron with Nonconstant Volume in the Spherical Space. Beitr. Algebra Geom., Vol. 38, No. 1, 11–18 (1997).
2. V.A. Alexandrov. Εύκαμπτες πολυεδρικές επιφάνειες. Quantum Τόμος 5, Τεύχος 6 (Νοέμβριος - Δεκέμβριος 1998).
3. Ben O'Connor. What is the Bellows Conjecture?.
<https://math.osu.edu/sites/math.su.edu/files/BellowsConjecture.pdf>
4. A. A. Gaifullin. Sabitov polynomials for volumes of polyhedra in four dimensions. Adv. Math., Vol. 252, 586–611 (2014) arXiv:1108.6014v1 [math.MG] 30 Aug. 2011.
5. A. A. Gaifullin. Generalization of Sabitov's Theorem to Polyhedra of Arbitrary Dimensions. Discrete Comput. Geom., Vol. 52, No. 2, 195–220 (2014).
6. A. A. Gaifullin. Embedded flexible spherical cross-polytopes with nonconstant volumes. Proc. Steklov Inst. Math., Vol. 288 (2015), 56–80.
7. I. Kh. Sabitov. The volume as a metric invariant of polyhedra. Discrete Comput Geom, 20:405–425, 1998.

8. A. A. Gaifullin, The Bellows conjecture in odd-dimensional Lobachevsky spaces.
9. A. Hess, A highway from heron to brahmagupta, *Forum Geometricorum*, 12: 191–192, 2012.
10. D. Michelucci, Using cayley menger determinants, In *Proceedings of the 2004 ACM symposium on Solid modeling*, pages 285–290, 2003.
11. P. Nadathur, An introduction to homology, University of Chicago, August 2007.
12. D. P. Robbins, Areas of polygons inscribed in a circle, *Discrete Comput Geom.* 12(2): 223–236, 1994.
13. A. Zomorodian, Introduction to Computational Topology, Chapter 3, Lecture notes for CS 468, Stanford University, Fall 2002.

Μπιλιάρδα

(Δ. Κοντοκώστας)

Η οπτική και η μηχανική μας παρέχουν παραδείγματα κινήσεων εντός επίπεδων χωρίων που εμποδίζονται από τα σύνορα των χωρίων δίχως όμως να διακόπτονται πλήρως παρά να συνεχίζονται μετά την άφιξή τους σε αυτά ακολουθώντας το νόμο της ισότητας των γωνιών πρόσπτωσης και ανάκλασης. Ονομάζουμε τις κινήσεις αυτές ως κινήσεις μπιλιάρδου. Η εργασία αφορά μελέτη μπιλιάρδων σε κύκλους, τετράγωνα, κωνικές, δευτεροβάθμιες καμπύλες κ.α. Εναλλακτική εργασία: μπιλιάρδα σε επίπεδες (ξεφούσκωτες) επιφάνειες...

Βιβλιογραφία

1. Diana Davis. Billiards and flat surfaces. *Snapshots of modern mathematics from Oberwolfach*, no 1, 2015.
2. Diana Davis, Cutting sequences, regular polygons, and the Veech group. *Geometriae Dedicata* 162 (2013), no. 1, 231–261.
3. Serge Tabachnikov. *Geometry and Billiards*. American Mathematical Society and the MASS (Mathematics Advanced Study Semesters).

Ευκαμπτόγωνα

(Δ. Κοντοκώστας)

Οι μαθηματικοί ευαρεστούνται ακόμη και μονάχα με μολύβι και χαρτί. Και ορισμένες φορές ούτε καν με μολύβι. Π.χ. από μια λωρίδα χαρτιού μπορεί κανείς να δημιουργήσει ένα ευκαμπτόγωνο: αρκεί να διπλώσει το χαρτί σε διαδοχικά ισοπλευρα τρίγωνα, να τα απλώσει στο χώρο και να ενώσει τις δύο μικρές πλευρές του αρχικού χαρτιού μεταξύ τους. Κατόπιν μπορεί να «κάμψει» το αποτέλεσμα λυγίζοντάς το καταλλήλως ώστε κάποιο συγκεκριμένο από τα ισόπλευρα τρίγωνα να εμφανίζεται ως όψη του. Και αυτή είναι η απαρχή της έννοιας ενός ευκαμπτόγωνα. Πρωτοδημιουργήθηκε το 1939 από τον Arthur Stone, έναν μεταπτυχιακό φοιτητή στο Princeton όταν οι σελίδες του αγγλικού χαρτιού που διέθετε περίσσευαν από τον αμερικάνικο φάκελο όπου ήθελε να τις τοποθετήσει...

Βιβλιογραφία

1. T. Anderson, T. B. McLean, H. Pajoohesh, C. Smith. The combinatorics of all regular flexagons. *European J. Combin.* 31 (2010) 72–80.
2. R. Brualdi, *Introductory Combinatorics*, 5th ed., Pearson, 2008.

3. M. Gardner, Catalan Numbers, Time Travel and Other Mathematical Bewilderments, W. H. Freeman, 1987.
4. M. Gardner. Hexaflexagons, *College Math. J.*, 43 (2011) 2–5.
5. M. Gardner. Hexaflexagons and Other Mathematical Diversions, Cambridge Univ. Press, 2008.
6. T. B. McLean, V-Flexing the hexahexaflexagon, *Amer. Math. Monthly* 86 (1979) 457–466.
7. T. B. McLean, Flexagons. math.georgiasouthern.edu/~bmclean/flex/index.html.
8. R. Moseley, Flexagon.net. <https://www.flexagon.net/>.
9. C. O. Oakley and R. J. Wisner, Flexagons, *Amer. Math. Monthly* 64 (1957) 143–154.
10. N. Sloane, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. <https://oeis.org>.

Αλγόριθμοι ενισχυτικής μάθησης για τη βέλτιστη διαχείριση μπαταριών αυτοπαραγωγών (Μ. Λουλάκης)

Μελέτη αλγορίθμων για τη βέλτιστη διαχείριση μπαταριών αυτοπαραγωγών. Ο προγραμματισμός φόρτισης εκφόρτισης της μπαταρίας λαμβάνεται ως συνάρτηση ελέγχου με σκοπό τη βελτιστοποίηση δεικτών όπως το κόστος ενέργειας σε βάθος χρόνου, η διάρκεια ζωής της μπαταρίας, ο χρόνος απόσβεσης της επένδυσης. Θα μελετηθούν, θα υλοποιηθούν και θα συγκριθούν ως προς την απόδοσή τους διάφοροι αλγόριθμοι ενισχυτικής μάθησης, όπως Q-learning, Deep Q-learning, Deep Q-network, Deep Deterministic Policy Gradient, TD3.

Βιβλιογραφία

1. António Corte Real, G. Pontes Luz, J.M.C. Sousa, M.C. Brito, S.M. Vieira, Optimization of a photovoltaic-battery system using deep reinforcement learning and load forecasting, *Energy and AI*, Volume 16, 2024, 100347, ISSN 2666-5468, <https://doi.org/10.1016/j.egyai.2024.100347>.
2. Jiarong Fan, Hao Wang, Deep Reinforcement Learning for Community Battery Scheduling under Uncertainties of Load, PV Generation, and Energy Prices, [arXiv cs.LG 2312.03008]
3. A. Selim, H. Mo, H. Pota, D. Dong, Optimal scheduling of battery energy storage systems using a reinforcement learning-based approach, *IFAC-PapersOnLine*, Vol. 56, Issue 2, 2023, pp 11741-11747
4. Jaehwan Lee, Soongeol Kwon, Supervised Optimization Framework for Charging and Discharging Controls of Battery Energy Storage, *IEEE transactions on Smart Grid*, vol. 15, issue 6, 2024, pp 5610 - 5621

Σύγκλιση των εμπειρικών κατανομών στη μετρική Wasserstein και εφαρμογές στη μηχανική μάθηση (Μ. Λουλάκης)

Το πρόβλημα της βέλτιστης μεταφοράς, ο δυϊσμός του Kantorovich, βέλτιστο σχέδιο μεταφοράς για μονοδιάστατες κατανομές, χώροι Wasserstein, η σύγκλιση της εμπειρικής κατανομής τυχαίου δείγματος στη μετρική Wasserstein, εφαρμογές στη μηχανική μάθηση.

Βιβλιογραφία

1. Villani, Cédric. Topics in optimal transportation. Vol. 58. American Mathematical Soc., 2021
2. Fournier, Nicolas, and Arnaud Guillin. "On the rate of convergence in Wasserstein distance of the empirical measure." Probability theory and related fields 162.3 (2015): 707-738
3. Bobkov, Sergey, and Michel Ledoux. One-dimensional empirical measures, order statistics, and Kantorovich transport distances. Memoirs of the AMS, Vol. 261. No. 1259, 2019
4. Ambrosio, Luigi, Nicola Gigli, and Giuseppe Savaré. Gradient flows: in metric spaces and in the space of probability measures. Springer Science & Business Media, 2008

Στοχαστικά συστήματα μεγάλης κλίμακας και υδροδυναμικά όρια

(Μ. Λουλάκης)

Θα μελετηθούν συστήματα μεγάλης κλίμακας η εξέλιξη των οποίων περιγράφεται σε μικροσκοπική κλίμακα με στοχαστικό τρόπο, με σκοπό την περιγραφή της ουσιαστικής μακροσκοπικής τους συμπεριφοράς. Διατηρήσιμες ποσότητες από τη μικροσκοπική δυναμική εκφράζονται μακροσκοπικά ως νόμοι διατήρησης στο όριο κλίμακας. Στόχος είναι η εξαγωγή αυτών των εξισώσεων με μαθηματικά αυστηρό τρόπο για διάφορες χαρακτηριστικές μικροσκοπικές αλληλεπιδράσεις και η έκφραση των μακροσκοπικών παραμέτρων μέσω των χαρακτηριστικών της μικροσκοπικής δυναμικής

Βιβλιογραφία

1. Liggett, Thomas Milton, and Thomas M. Liggett. Interacting particle systems. Vol. 2. New York: Springer, 1985
2. Kipnis, Claude, and Claudio Landim. Scaling limits of interacting particle systems. Vol. 320. Springer Science & Business Media, 2013
3. Guo, Mao Zheng, George C. Papanicolaou, and SR Srinivasa Varadhan. "Nonlinear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions." Communications in Mathematical Physics 118.1 (1988): 31-59

Πεπερασμένα στοιχεία για προβλήματα Θαλάσσιας Υδροακουστικής

(Θ. Παπαθανασίου)

Η Θαλάσσια Υδροακουστική αφορά στη μελέτη διάδοσης ακουστικών κυμάτων στο ωκεάνιο ή παράκτιο περιβάλλον. Σχετικές εφαρμογές περιλαμβάνουν την λειτουργία συστημάτων sonar, την παραγωγή θορύβου από ανθρώπινες δραστηριότητες όπως η λειτουργία συστημάτων πρόωσης πλοίων και οι υποθαλάσσιες εξορύξεις, αλλά και την επικοινωνία θαλάσσιων θηλαστικών όπως οι φάλαινες και τα δελφίνια. Οι εξισώσεις που διέπουν τα σχετικά φαινόμενα πρέπει να επιλυθούν σε χωρία μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας και μεταβλητών ιδιοτήτων ακουστικού μέσου. Το γεγονός αυτό καθιστά την αναλυτική επίλυση πρακτικά αδύνατη, οπότε και χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι. Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η μελέτη προβλημάτων θαλάσσιας ακουστικής με τη χρήση Πεπερασμένων Στοιχείων ή και συνδυασμών τους με άλλες μεθόδους προσεγγιστικής επίλυσης όπως η μέθοδος των συζευγμένων ιδιομορφών.

Βιβλιογραφία

1. F. B. Jensen, W. A. Kuperman, M. B. Porter and H. Schmidt, Computational Ocean Acoustics, 2nd Edition, Springer Science & Business Media, LLC 2011, Springer New York, NY.
2. G. A. Athanassoulis, K. A. Belibassakis, D. A. Mitsoudis, N. A. Kampanis and V. A. Dougalis, Coupled mode and finite element approximations of underwater sound propagation problems in general stratified environments, Journal of Computational Acoustics, Vol. 16, No. 1, (2008), 83–116.
3. K. A. Belibassakis, G. A. Athanassoulis, T. K. Papathanasiou, S. P. Filopoulos and S. Markolefas, Acoustic wave propagation in inhomogeneous, layered waveguides based on modal expansions and hp-FEM, Wave Motion, Volume 51, Issue 6, (2014), 1021–1043.

Πεπερασμένα στοιχεία για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις 6ης τάξεως

(Θ. Παπαθανασίου)

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις 6ης τάξεως εμφανίζονται σε προβλήματα υδροελαστικότητας, κάμψης δοκών σε θεωρίες βαθμίδας ελαστικότητας και άλλες εφαρμογές. Οι αυξημένες απαιτήσεις συνέχειας λόγω της ανώτερης τάξης των διαφορικών τελεστών που εμφανίζονται στις εξισώσεις αυτές απαιτούν χρήση ειδικών διατυπώσεων Πεπερασμένων Στοιχείων, όπως για παράδειγμα στοιχεία Hermite ή στοιχεία Μικτής Διατύπωσης. Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η ανάπτυξη κατάλληλων μεθόδων για προβλήματα συνοριακών τιμών με διαφορικές εξισώσεις 6ης τάξεως και η εκ των προτέρων εκτίμηση σφάλματος.

Βιβλιογραφία

1. J. J. Stoker, Water Waves. 1957, New York: Interscience Publishers.
2. O. V. Sergienko, Normal modes of a coupled ice-shelf/sub-ice-shelf cavity system. Journal of Glaciology, 59 (213), (2013), 76–80.
3. H. M. Meylan, L. G. Bennetts, R. G. Hosking and E. Catt, On the calculation of normal modes of a coupled ice-shelf/sub-ice-shelf cavity system. Journal of Glaciology, 63 (240), 2017, 751–754.
4. D. M. Manias, T. K. Papathanasiou, S. I. Markolefas and E. E. Theotokoglou, Analysis of a gradient-elastic beam on Winkler foundation and applications to nano-structure modelling, European Journal of Mechanics-A/Solids 56, 2015, 45–58.

Η ατελής παραγοντοποίηση Cholesky για επίλυση προβλημάτων παραβολικού τύπου με χρήση πεπερασμένων στοιχείων

(Θ. Παπαθανασίου)

Η ατελής παραγοντοποίηση Cholesky (incomplete Cholesky factorisation) είναι μια μέθοδος προσεγγιστικής παραγοντοποίησης συμμετρικών και θετικά ορισμένων πινάκων. Χρησιμοποιείται ευρέως σε διαδικασίες προ-ρύθμισης (preconditioning) επαναληπτικών μεθόδων επίλυσης γραμμικών συστημάτων. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται η βελτίωση του δείκτη κατάστασης του πίνακα συντελεστών του συστήματος. Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η διερεύνηση της χρήσης ατελούς παραγοντοποίησης Cholesky για τη διαχείριση πινάκων σε μεθόδους Πεπερασμένων Στοιχείων. Τα προβλήματα που θα μοντελοποιηθούν στην παρούσα εργασία αφορούν σε μεταφορά θερμότητας μη μόνιμης κατάστασης. Η επίλυση θα γίνει με χρήση Πεπερασμένων Στοιχείων για τη χωρική διακριτοποίηση και μεθόδων τύπου Runge-Kutta για την χρονική ολοκλήρωση.

Βιβλιογραφία

1. G. H. Golub and C. F. Van Loan, 1996, *Matrix Computations* (3rd ed.), Johns Hopkins.
2. Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems* (2nd ed.), 2003, SIAM, Philadelphia.
3. C. Grossman, H. G. Roos and M. Stynes, *Numerical Treatment of Partial Differential Equations*, 2007, Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg.
4. T. A. Manteuffel, An incomplete factorization technique for positive definite linear systems, *Mathematics of Computation*, 34, 1980, 473–497.

Το μοντέλο SABR, μεγάλες αποκλίσεις και εφαρμογές στην αποτίμηση παραγώγων

(Α. Παπαπαντολέων)

Το μοντέλο SABR (Stochastic Alpha Beta Rho) χρησιμοποιείτε ευρύτατα στις χρηματοοικονομικές αγορές επειδή συνδυάζει την απλότητα με την καλή περιγραφή των εμπειρικών δεδομένων. Το θέμα της εργασίας αυτής είναι να χρησιμοποιήσουμε την θεωρία των μεγάλων αποκλίσεων για να υπολογίσουμε τις τιμές κάποιων παραγώγων καθώς κάποιες παράμετροι τείνουν σε κάποιο όριο (πχ μεγάλο strike ή μεγάλο maturity), που μας βοηθάει να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους από τα δεδομένα ταχύτερα.

Βιβλιογραφία

1. Hagan, Patrick S.; Kumar, Deep; Lesniewski, Andrew S.; Woodward, Diana E. (January 2002). “Managing Smile Risk” (PDF). *Wilmott*. Vol. 1. pp. 84–108.
2. Hagan, Patrick S.; Kumar, Deep; Lesniewski, Andrew S.; Woodward, Diana E. ”Arbitrage Free SABR”. *Wilmott*. Vol. 2014, no. 69. pp. 60–75.

Επίλυση ΜΔΕ με νευρωνικά δίκτυα

(Α. Παπαπαντολέων)

Η μηχανική μάθηση και τα νευρωνικά δίκτυα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ) επειδή, θεωρητικά, δεν υποφέρουν από την «κατάρτα της διάστασης». Στην παρούσα εργασία θέλουμε να επιλύσουμε ένα πλήθος από ΜΔΕ για διαφορετικές παραμέτρους γρήγορα, επομένως μας ενδιαφέρει να συνδυάσουμε την μεθοδο των Γεωργούλη, Λουλάκη και Τσιούρβα για την επίλυση ΜΔΕ μέσω gradient flows είτε με την μέθοδο της βαθιάς παραμετροποίησης (deep parametric method) είτε με την μέθοδο των βαθέων τελεστών (deep operator learning).

Βιβλιογραφία

1. E. Georgoulis, M. Loulakis, and A. Tsiourvas. Discrete gradient flow approximations of high dimensional evolution partial differential equations via deep neural networks. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 117:106893, 2023.
2. K. Glau and L. Wunderlich. The deep parametric PDE method and applications to option pricing. *Applied Mathematics and Computation*, 432:Paper No. 127355, 21, 2022.
3. S. Goswami, A. Bora, Y. Yu, and G. E. Karniadakis. Physics-Informed Deep Neural Operator Networks, pages 219–254. Springer International Publishing, Cham, 2023.

Η χρήση των συστημάτων σημειωτικής αναπαράστασης στη Διδακτική της Γραμμικής Άλγεβρας: Η περίπτωση της Διαγωνοποίησης

(Κ. Παυλοπούλου)

Η χρήση της θεωρίας των συστημάτων σημειωτικής αναπαράστασης στη διδασκαλία των μαθηματικών έχει δώσει πολύ θετικά αποτελέσματα σε διάφορα γνωστικά αντικείμενα των μαθηματικών, όπως και σε βασικές έννοιες της γραμμικής άλγεβρας σύμφωνα με έρευνες που έχουν γίνει. Θέλουμε να μελετήσουμε την εφαρμογή της στην έννοια της διαγωνοποίησης, αφού πρώτα διερευνήσουμε τις αντιλήψεις των φοιτητών πάνω στην κατανόηση της έννοιας αυτής.

Βιβλιογραφία

1. Δαγδιλέλης Β., Παυλοπούλου Κ., Τρίγγα Π. (1998), Διδακτική, Μέθοδοι κι Εφαρμογές, Εκδ. Ευγ. Μπένου, Αθήνα.
2. Duval, R. (2006), A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, http://www.mat.ufrgs.br/~edumatec/artigos/esm_2008_v68/5semiotic.pdf.
3. Pavlopoulou K. (1993) Un problème décisif pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire: la coordination des registres de représentation, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 5, 67–93, Strasbourg, France.

Η χρήση της Τεχνητής Νοημοσύνης στην επίλυση προβλημάτων Ευκλείδειας Γεωμετρίας

(Κ. Παυλοπούλου)

Η ευρεία χρήση της τεχνητής νοημοσύνης τα τελευταία χρόνια έχει επηρεάσει την εκπαιδευτική διαδικασία τόσο από την πλευρά των εκπαιδευτικών όσο και από τη μεριά των σπουδαστών. Υπάρχει μεγάλο επιστημονικό ενδιαφέρον για την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων της σε ορισμένους τομείς των μαθηματικών, όπως η επίλυση προβλημάτων ευκλείδειας γεωμετρίας, καθώς επίσης για τη στάση των χρηστών απέναντι στα αποτελέσματα που τους δίνει. Καλούμαστε να ερευνήσουμε το θέμα αυτό μέσα από τη βιβλιογραφική έρευνα, αλλά και τη δημιουργία ερωτηματολογίων ή συνεντεύξεων.

Βιβλιογραφία

1. Miragoli M. (2024), Conformism, Ignorance & Injustice: AI as a Tool of Epistemic Oppression, *Epi-steme*, 1-19, doi:10.1017/epi.2024.11.
2. Τάσος Πατρώνης, et al., (2024), Το τέλος του μαθηματικού συλλογισμού Ιστορική επισκόπηση, φιλοσοφική συζήτηση και επίλυση προβλήματος από φοιτητές σε αντιπαράθεση με τη νέα τεχνητή νοημοσύνη, 39ο Συνέδριο Ε.Μ.Ε., Αρχαία Ολυμπία, 1-3 Νοεμβρίου.

Η διαφορική εξίσωση του Mathieu

(Ε. Πρωτοπαπάς)

Η διαφορική εξίσωση του Mathieu είναι μια εξίσωση με πολλές εφαρμογές σε διάφορα επιστημονικά πεδία. Με την εργασία αυτή θα μελετήσουμε την εξίσωση αυτή αναδεικνύοντας το πώς και πότε πρωτοεμφανίστηκε, τις ιδιότητές της, την αναλυτική λύση της, τον μετασχηματισμό της σε σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων και την επίλυσή της με τη μέθοδο των διαταραχών. Επίσης, θα τη μελετήσουμε ως υποπερίπτωση της εξίσωσης του Mill και μερικές διαφοροποιημένες εξισώσεις Mathieu. Στη συνέχεια, θα μελετηθούν συγκεκριμένες εφαρμογές

της εξίσωσης στις επιστήμες (π.χ. δόνηση ελλειπτικής μεμβράνης, εξισώσεις κύλισης πλοίου, θερμική διάχυση, ηλεκτρομαγνητικά κύματα κ.τ.λ.).

Βιβλιογραφία

1. V. Alexandrov. An Example of a Flexible Polyhedron with Nonconstant Volume in the Spherical Space. Beitr. Algebra Geom., Vol. 38, No. 1, 11–18 (1997).
2. W. E. Boyce and R. C. DiPrima: Συνήθειες διαφορικές εξισώσεις, εκδόσεις EMI.
3. M. Morse and H. Feshbach, Methods of Theoretical Physics (McGraw-Hill, New York, 1953), Part 1, Sect. 5.2.
4. E. Mathieu, J. Math. Pures Appl. 13, 137 (1868).
5. Derek J. Daniel, Exact solutions of Mathieu equation, Prog. Theor. Exp. Phys. 2020, 043A01.
6. Σπύρου Κ., Δυναμική Ευστάθεια Πλοίου, Κάλλιπος 2015.
7. McLachlan, N. W., 1947, Theory and Applications of Mathieu Functions, Clarendon Press, Oxford, UK.

Μαθηματική μοντελοποίηση της πυρηνοποίησης και της διαδικασίας ανάπτυξης κρυστάλλων σε δυαδικά τήγματα (έχει δοθεί) (Ε. Πρωτοπαπάς)

Στην εργασία αυτή θα μελετηθεί η παροδική συμπεριφορά ενός συνόλου σωματιδίων σε ένα υπερψυγμένο δυαδικό τήγμα. Οι νόμοι του μοντέλου βασίζονται στην κινητική εξίσωση τύπου Fokker-Planck. Θα διατυπωθούν οι οριακές και αρχικές συνθήκες και θα λυθεί αναλυτικά το πρόβλημα. Η μοντελοποίηση των σωματιδίων θα γίνει σε διάφορες γεωμετρίες. Θα μελετηθεί η σχέση της θερμοκρασίας με τη συγκέντρωση.

Βιβλιογραφία

1. Nikishina M.A. and Alexandrov D. V. Mathematical Modeling of Nucleation and Growth Processes of Ellipsoidal Crystals in Binary Melts. Margarita Crystals 2022, 12, 1495.
2. Nikishina M.A. and Alexandrov D. V. Mathematical modeling of the growth of ellipsoidal crystals in metastable melts and solutions. Math Meth Appl Sci. 2021; 44: 12252–12259.
3. Nikishina M.A. and Alexandrov D. V. Nucleation and growth dynamics of ellipsoidal crystals in metastable liquids. Phil. Trans.R.Soc.A. 2021 ; 379: 20200306.
4. Eugenia V. Makoveeva, Dmitri V. Alexandrov and Alexander A. Ivanov. On the Theory of Unsteady-State Operation of Bulk Continuous Crystallization. Crystals 2022; 12, 1634.

Χρονοεξαρτώμενη αξονοσυμμετρική έρπουσα ροή (Ε. Πρωτοπαπάς)

Η σταθερή αξονοσυμμετρική έρπουσα ροή είναι η αξονοσυμμετρική ροή στην οποία οι ιξώδεις δυνάμεις επικρατούν των αδρανειακών και δεν εξαρτάται από το χρόνο, η λύση της οποίας προκύπτει από μια μερική διαφορική εξίσωση 4ης τάξης. Η μη σταθερή αξονοσυμμετρική έρπουσα ροή επεκτείνει την ιδέα αυτή, αφού προστίθεται ως μεταβλητή ο χρόνος. Στην εργασία αυτή θα μελετηθεί η χρονοεξαρτώμενη αξονοσυμμετρική έρπουσα ροή ξεκινώντας από το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων, καθώς επίσης και εφαρμογές της σε προβλήματα των επιστημών.

Βιβλιογραφία

1. Happel J. and Brenner H. Low Reynolds number hydrodynamics with special applications to particulate media. 1983. Martinus Nijhoff Publishers.
2. Schieber D. J., Cordoba A. and Indei T. The analytic solution of Stokes for time-dependent creeping flow around a sphere: Application to linear viscoelasticity as an ingredient for the generalized Stokes–Einstein relation and microrheology analysis. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2013; 200, 3–8.

Pricing Vanilla and Exotic options using the 3/2 Stochastic Volatility model (Σ. Σαμπάνης)

Using a new generation of explicit Euler-type numerical schemes for SDEs, one can show that the pricing of Exotic options under the assumption of the 3/2 Stochastic Volatility model can be performed in a more efficient way than before. (Multi-level) Monte Carlo simulations can be used to illustrate the implementation of this new methodology (and its agreement with the theoretical results).

Essential/Desired Background Knowledge

Good knowledge of Stochastic Differential Equations (SDEs) and Numerics for SDEs is required. Knowledge of some programming language (such as C++, Java, etc) or relevant mathematical package (MAPLE, Matlab, etc) is considered essential.

Βιβλιογραφία

1. Sabanis, S. (2015). Euler approximations with varying coefficients: the case of superlinearly growing diffusion coefficients, *Annals of Applied Probability*.
2. Kloeden P.E. and Platen, E. (1999). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Applications of Mathematics*, Springer, Berlin. MR1214374. Kloeden P.E. and Platen, E. (1999). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Applications of Mathematics*, Springer, Berlin. MR1214374.
3. Goard, J. and Mazur, M. (2013). Stochastic volatility models and the pricing of VIX options. *Mathematical Finance* 23, no. 3, 439–458. MR3070371.

Using stochastic gradient methods for the computation of Risk Measures (Σ. Σαμπάνης)

A core part of the (modern) financial risk theory concentrates around the understanding and practical use of risk measures. Using recent results from stochastic gradient methods, we will analyse suitable algorithms which can be used for the practical evaluation of risk measures given a set of asset prices. Monte Carlo simulations will be used to illustrate the implementation of the algorithms.

Essential/Desired Background Knowledge

Good knowledge of Probability Theory is required. Knowledge of some programming language (such as C++, Java, etc) or relevant mathematical package (MAPLE, Matlab, etc) is considered essential.

Βιβλιογραφία

1. (essential - only iid case): M. Barkhagen, N. Chau, É. Moulines, M. Rásonyi, S. Sabanis, and Y. Zhang. On stochastic gradient Langevin dynamics with dependent data streams in the log-concave case. arXiv:1812.02709

- (optional): Laruelle, S. and Pagès, G. (2012). Stochastic approximation with averaging innovation applied to Finance. Monte Carlo Methods and Applications, 18(1), pp. 1–51.

Tamed Unadjusted Langevin Algorithm

(Σ. Σαμπάνης)

There has been recently an increasing interest in Bayesian inference applied to high-dimensional models often motivated by machine learning applications. Rather than obtaining a point estimate, Bayesian methods attempt to sample the full posterior distribution over the parameters which provide a way to assert uncertainty in the model and prevents from overfitting. We will study sampling methods (ULA/TULA) based on Euler-Maruyama discretizations of appropriate Langevin SDEs.

The main focus of the project will be on understanding the basic theoretical framework around the aforementioned algorithms and on their practical implementations via simulations.

Essential/Desired Background Knowledge

Good knowledge of Stochastic Differential Equations (SDEs) and Numerics for SDEs is required. Knowledge of some programming language (such as C++, Java, etc) or relevant mathematical package (MAPLE, Matlab, etc) is considered essential.

Βιβλιογραφία

- A. Durmus and É. Moulines. “High-dimensional Bayesian inference via the Unadjusted Langevin Algorithm”. arXiv: 1605.01559 [math.ST]
- Brosse, N., Durmus, A., Moulines, É., and Sabanis, S. The tamed unadjusted langevin algorithm. arXiv:1710.05559 (2017).

Διαφορισιμότητα και υποδιαφορικά κυρτών συναρτήσεων σε χώρους Banach (Γ. Σμυρλής)

Συνέχεια και υποδιαφορικά κάτω ημισυνεχών κυρτών συναρτήσεων. Maximal μονοτονία του υποδιαφορικού. Υποδιαφορικό αθροίσματος. Διαφορισιμότητα Gateaux και Fréchet κυρτών συναρτήσεων και θεώρημα Mazur. Υποδιαφορικά συνεχών κυρτών συναρτήσεων.

Βιβλιογραφία

- B. S. Mordukhovich and N. M. Nam, An Easy Path to Convex Analysis and Applications, Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics, in the Morgan & Claypool Publishers series (2014).
- R. R. Phelps, Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability, Lecture Notes in Mathematics 1364, Springer Verlag, 1988.

Κλάσεις ομαλοποιημένων (regulated) συναρτήσεων

(Γ. Σμυρλής)

Συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης και βασικές ιδιότητες. Ο χώρος Banach των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης. Σημεία συνέχειας και διαφορισιμότητας συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης. Κατά σημείο σύγκλιση ακολουθίας συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης και θεώρημα Helly. Απόλυτα συνεχείς συναρτήσεις και βασικές ιδιότητες. Διαφορισιμότητα απόλυτα συνεχών συναρτήσεων. Απόλυτα συνεχείς συναρτήσεις και ολοκλήρωμα Lebesgue. Θεμελιώδες Θεώρημα Διαφορικού Λογισμού. Ομαλοποιημένες (regulated) συναρτήσεις και βασικές ιδιότητες. Υπόχωροι και συμπαγή υποσύνολα του χώρου των ομαλοποιημένων συναρτήσεων.

Βιβλιογραφία

1. G. A. Monteiro, A. Slavik and M. Tvrdy, Kurzweil-Stieltjes integral, Theory and its Applications, In: World Scientific, Series in Real Analysis, vol.15 (2018).
2. D. Frankova, Regulated functions, Math. Bohem. 116, 20–59 (1991).

Παράγωγος κατά Stieltjes και γραμμικές Stieltjes συνήθεις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης (Γ. Σμυρλής)

g -τοπολογία, g -συνεχείς και g -απόλυτα συνεχείς συναρτήσεις στην πραγματική ευθεία, όπου g αύξουσα και αριστερά συνεχής συνάρτηση. Συμπαγή υποσύνολα του χώρου των g -απόλυτα συνεχών συναρτήσεων. Παράγωγος κατά Stieltjes (g -παράγωγος) και βασικές ιδιότητες. Θεμελιώδες Θεώρημα Διαφορικού Λογισμού για το ολοκλήρωμα Lebesgue-Stieltjes. Stieltjes-εκδοχές εκθετικής συνάρτησης και g -απόλυτα συνεχείς λύσεις Stieltjes-γραμμικών ΣΔΕ πρώτης τάξης.

Βιβλιογραφία

1. M. Frigon and R. L. Pouso, Theory and applications of first-order systems of Stieltjes differential equations, Adv. Nonlinear Anal. 6, 13–36 (2017).
2. R. L. Pouso and A. Rodriguez, A new unification of continuous, discrete, and impulsive calculus through Stieltjes derivatives, Real Anal. Exch., 40, 319–353 (2015).

Θέματα Διπλωματικών Εργασιών (έχουν δοθεί)

(Π. Στεφανέας)

1. Το τετράγωνο της αντίθεσης και συνδυαστικά θέματα στις λογικές γεωμετρίες.
2. Εφαρμογές τυπικών μεθόδων σε πρωτόκολλα ασφάλειας επικοινωνίας με χρήση Maude.
3. Γράφοι γνώσης και εφαρμογές στα γλωσσικά μοντέλα.
4. Τροπική λογική και μοντελοποίηση δικτύων απόφασης.
5. Θεωρία κατηγοριών και εφαρμογές της στη μοντελοποίηση βάσεων δεδομένων.
6. Φιλοσοφία της τεχνητής νοημοσύνης και πληροφορίας.

Διαφορικές ανισώσεις και μη ομαλά συνοριακά προβλήματα

(Α. Χαραλαμπίδης)

Πολλά φυσικά προβλήματα διατυπώνονται στη μορφή διαφορικών ανισοτήτων (differential inequalities) σε αντιδιαστολή με το πλαίσιο των διαφορικών εξισώσεων. Ένας εποικοδομητικός τρόπος αντιμετώπισής τους είναι η διατύπωσή τους με τη μορφή πλειονότιμων απεικονίσεων ή συναρτήσεων με σύνολα τιμών απαρτιζόμενα από σύνολα (set-valued mappings). Μια πρώτη κατηγορία αφορά σύνολα τιμών που περιγράφονται από υποδιαφορικά κυρτών με μη ομαλών δυναμικών.

Βιβλιογραφία

1. Baiocchi C, Capelo A, Variational and Quasivariational Inequalities, J. Wiley, 1984.
2. Kinderlehrer D, Stampacchia G, An introduction to variational inequalities and their applications, Academic press, New York, 1980.

Θεωρία ομογενοποίησης και βέλτιστος σχεδιασμός σύνθετων υλικών (Α. Χαραλαμπίδης)

Η μαθηματική θεωρία ομογενοποίησης αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο για την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων αναφορικά με τις μακροσκοπικές ιδιότητες σύνθετων υλικών. Ο βέλτιστος σχεδιασμός ενός υλικού περιέχει ένα τεράστιο πλαίσιο μεθοδολογιών που αποσκοπούν στο χαρακτηρισμό του. Η βασικότερη προσέγγιση αφορά τα προβλήματα βελτιστοποίησης δυο φάσεων και συναντάται πιλοτικά σε προβλήματα καθορισμού αγωγιμότητας αγώγιμων σωμάτων ή ελαστικής σύστασης σύνθετων υλικών.

Βιβλιογραφία

1. Allaire, G., Shape optimization by the Homogenization method, Springer, New York, 2002.
2. Cherkaev, A., Kohn, R., Topics in the Mathematical theory of composite materials, Birkhauser, Boston, 1997.

Αντίστροφα προβλήματα ανεύρεσης συντελεστών διαφορικών εξισώσεων επί τη βάση συνοριακών δεδομένων (Α. Χαραλαμπίδης)

Ο καθορισμός των συντελεστών μιας διαφορικής εξίσωσης αποτελεί τον προσδιορισμό των φυσικών ιδιοτήτων ενός μέσου το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση αυτή. Στο πλαίσιο των αντιστρόφων προβλημάτων διαθέτουμε ως δεδομένα, μετρήσεις του φυσικού πεδίου επί ενός τμήματος του συνόρου που οριοθετεί το χωρίο με τις προσδιοριστέες φυσικές ιδιότητες. Η ανακατασκευή των ιδιοτήτων είναι ένα ασταθές πρόβλημα και αποτελεί πρωταρχικό μέλημα η θεμελίωση της μοναδικότητας της αντιστροφής καθώς και η διατύπωση ενός νόμου μεταβολής των εκτιμώμενων συντελεστών σε σχέση με τη μεταβολή των δεδομένων.

Βιβλιογραφία

1. Bellassoued, M., Imanumilov, O., Yamamoto M., Inverse problem of determining the density and two Lamé coefficients by boundary data, SIAM J. MATH. ANAL., Vol. 40, No. 1, pp. 238-265, 2008.

Αριθμητικές μέθοδοι σε προβλήματα τετραγωνικού προγραμματισμού (Κ. Χρυσάφινος)

Στόχος της διπλωματικής εργασίας είναι η αναλυτική και υπολογιστική μελέτη τεχνικών επίλυσης προβλημάτων τετραγωνικού προγραμματισμού. Τα προβλήματα τετραγωνικού προγραμματισμού έχουν ως αφετηρία την ελαχιστοποίηση τετραγωνικών συναρτήσεων της μορφής, $q(x) = \frac{1}{2}x^T Gx - b^T x$ πάνω σε σύνολο περιορισμών / δεσμεύσεων της μορφής $Q := \{a_i^T x = c_i \quad i \in \mathcal{E}, a_i^T x \leq c_i \quad i \in \mathcal{I}, \}$ όπου $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός πίνακας, \mathcal{E}, \mathcal{I} (πεπερασμένα) σύνολα δεικτών που περιγράφουν δεσμεύσεις και περιορισμούς αντιστοίχως, ενώ $b, c, a_i \in \mathbb{R}^n$.

Βιβλιογραφία

1. J. Nocedal and S. Wright "Numerical Optimization", Springer-Verlag, New York, 2006.
2. R. Fletcher, "Practical Methods of Optimization", J. Wiley, New-York, 1987.

Αριθμητική επίλυση μη-γραμμικών συστημάτων συνήθων διαφορικών εξισώσεων θηράματος-Θηρευτή (Κ. Χρυσσαφίνος)

Το θέμα της διπλωματικής εργασίας αφορά την αριθμητική επίλυση μη-γραμμικών συστημάτων συνήθων διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν σε προβλήματα οικολογίας - βιολογίας, όπως προβλήματα θηράματος - θηρευτή. Σκοπός είναι η υπολογιστική μελέτη συστημάτων αυτής της μορφής με κατάλληλες αριθμητικές μεθοδολογίες, όπως π.χ. μεθοδολογίες τύπου Runge-Kutta and / or Multistep Methods.

Βιβλιογραφία

1. Γ. Ακρίβης, Βασ. Δουγαλής, Αριθμητικές Μέθοδοι για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης (2022).
2. J. Lambert, Numerical Methods for Ordinary Differential Equations, J. Wiley Publications (1991).
3. E. Hairer, S. Norsett, and G. Wanner, Solving Ordinary Differential Equations: Nonstiff Problems, Springer (2008).

Αριθμητική επίλυση γραμμικών παραβολικών ΜΔΕ με την ασυνεχή στο χρόνο μέθοδο Galerkin (Κ. Χρυσσαφίνος)

Η διπλωματική εργασία αφορά την επίλυση γραμμικών παραβολικών ΜΔΕ με βάση την ασυνεχή στο χρόνο μέθοδο Galerkin σε συνδυασμό με κλασσικά σύμμορφα πεπερασμένα στοιχεία για την χωρική διακριτοποίηση. Στόχος της εργασίας είναι η κατανόηση και ανάλυση της βασικής ασυνεχούς χρονικά μεθόδου Galerkin που παράγουν τα σταθερά και γραμμικά πολυώνυμα στο χρόνο και ιδιαίτερα η μελέτη θεμάτων ευστάθειας και εκτιμήσεων σφάλματος.

Βιβλιογραφία

1. V. Thomme. Galerkin finite element methods for parabolic PDEs, Springer-Verlag, Berlin 1997
2. D. Meidner and B. Vexler. A priori error estimates for space-time finite element discretization of parabolic optimal control problems. Part I: Problems without control constraints, SIAM J. Cont. Optim. Vol (47), 1150-1177 (2008)

Σημείωση: Η Σ. Λαμπροπούλου θα είναι σε εκπαιδευτική άδεια κατά το Ακαδημαϊκό Έτος 2025-26.
