

Άπειρη σύνθεση κινήσεων Brown και στοχαστικών διαδικασιών

Θεωρούμε μια ακολουθία B_1, B_2, \dots από κινήσεις Brown (με παράμετρο όλη την πραγματική ευθεία), ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανοτήτων, και μελετάμε τις ιδιότητες της στοχαστικής διαδικασίας $W_n = B_n \circ \dots \circ B_1$, κυρίως στο όριο όταν $n \rightarrow \infty$. (Η σύνθεση εδώ σημαίνει: $(B_2 \circ B_1)(\omega, t) := B_2(\omega, B_1(\omega, t))$, δηλαδή σύνθεση ως προς τη «χρονική παράμετρο» για κάθε ω .) Αν οι κινήσεις Brown είναι τυποποιημένες και ανεξάρτητες τότε το όριο $W_\infty(t), t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, υπάρχει με πολύ ασθενή μορφή και αποτελεί οικογένεια από εναλασσόμενες τυχαίες μεταβλητές. Επομένως, από το θεώρημα των de Finetti + Ryll-Nardzewski, υπάρχει ένα τυχαίο μέτρο πιθανότητας έτσι ώστε, δεδομένου (conditional on) του μέτρου αυτού, η οικογένεια να είναι οικογένεια από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Θα αποδείξουμε το οριακό θεώρημα χρησιμοποιώντας Μαρκοβιανή θεωρία (συναρτήσεις Lyapunov) και θα κατασκευάσουμε το τυχαίο μέτρο σαν όριο των μέτρων κατοχής (occupation measures) των W_n πάνω στο μοναδιαίο διάστημα. Όταν οι κινήσεις δεν είναι ανεξάρτητες, η ύπαρξη ορίου είναι ανοιχτό πρόβλημα. Στην περίπτωση όπου $P(B_1 = B_2 = \dots) = 1$, ισχυριζόμαστε ότι το όριο και πάλι υπάρχει. Αυτός ο ισχυρισμός γίνεται με βάση μερικά προκαταρκτικά αποτελέσματα όταν οι διαδικασίες είναι τυχαίος περίπατος σε διακριτό χρόνο. Θα αναφέρουμε σύντομα επίσης και το πρόβλημα σύνθεσης άλλων διαδικασιών, π.χ., εμπειρικών κατανομών ανεξαρτήτων ομοιομόρφων (στο μοναδιαίο διάστημα) τυχαίων μεταβλητών, η σύνθεση των οποίων σχετίζεται με το φαινόμενο του κορεσμού (saturation phenomenon) στη θεωρία προσέγγισης συνεχών συναρτήσεων από πολυώνυμα. Μέρη της εργασίας αυτής είναι σε συνεργασία με τους Nicolas Curien (Université Paris Sud), Linglong Yuan (XJTLU, China) και Μιχάλη Ζαζάνη (Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών).